Asignatura: Sistemas y señales discretos.
Tema: **La Transformada Discreta de Fourier.**
Lugar de Ejecución: Instrumentación y control
(Edificio de electrónica)

Objetivos específicos

1. Conocer que es la Transformada de Fourier Discreta y sus aplicaciones.
2. Resolver problemas que involucren la Transformada de Fourier Discreta.
3. Obtener la transformada de Fourier discreta de señales reales usando la tarjeta de sonido.

Materiales y equipos

1. Computador con sistema operativo Windows y el programa MATLAB.

Introducción teórica

1. LA TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER

El creciente uso de métodos digitales para la computación y para aplicaciones al procesamiento de señales, ha hecho resaltar la versión discreta de la transformada de Fourier. Este tópico se examinará brevemente aquí, centrando el interés en la relación entre la transformada de Fourier discreta y la continua.

Represéntese una secuencia de *N* muestra igualmente espaciadas en el intervalo (0, *NT*) por

$$f(kT)=f(0),\ f(T),\ f(2T),\ldots,\ f[(N-1)T]\ . \qquad (1.1)$$

la transformada de *Fourier discreta* (TFD) se define como la secuencia de *N* muestra complejas en el dominio de las frecuencias dada por[1]

$$F_D(n\Omega)=\sum_{k=0}^{N-1} f(kT)e^{-j\Omega nk}\ ,\ n = 0,1,\ldots,N-1 \qquad (1.2)$$

Donde $\Omega = 2\pi/(NT)$. Nótese que $\Omega T = 2\pi/N$ y Ω y T no aparecen explícitamente en la TFD. Estos parámetros solo entran como factores de escala para interpretar los resultados y no se necesitan en los pasos de la computación.
Al hacer la aproximación numérica de la transformada de Fourier, es necesario restringir el intervalo de observación a una longitud finita. Para ello se definirá la función truncada $\bar{f}(t)$ en términos de $f(t)$ por:

$$\bar{f}(t)=\begin{cases} f(t) & 0\le t\le NT \\ 0 & en\ \ cualquier\ \ otro\ \ caso \end{cases} \qquad (1.3)$$

la transformada de Fourier $\bar{F}(\omega)$, de esta función truncada es:

$$\bar{F}(\omega)=\int_0^{NT} f(t)e^{-jwt}dt \qquad (1.4)$$

Haciendo los cambios de variable $\omega \to n\Omega,\ \ dt \to T$, puede aproximarse la ecuación anterior por:

[1] Algunos autores emplean definiciones algo diferentes a ésta, y la sumatoria puede ser de $k = 1$ a $k = N$. Nótese que T se usa aquí como el intervalo entre muestras.

$$\overline{F}(n\Omega) \cong \sum_{k=0}^{N-1} f(kT) e^{-jn\Omega kT} T \qquad (1.5)$$

Las ecuaciones (1.2) y (1.5) muestran que

$$\overline{F}(\omega)\big|_{\omega=n\Omega} \cong TF_D(n\Omega)\,. \qquad (1.6)$$

De la comparación con la transformada continua, se ve que las dos son análogas si (1) la señal *f*(*t*) se trunca en el intervalo (0, *NT*); (2) en ese intervalo la señal *f*(*t*) aparece como una secuencia de *N* valores igualmente espaciados y (3) el intervalo se extiende periódicamente produciendo las frecuencias armónicas discretas $n\Omega = 2\pi n/(NT)$. Nótese que la segunda condición implica que los espectros de frecuencia calculados son periódicos con periodo $N\Omega$. Para probar esto, considérese el calculo de F_D(nΩ) para *n* > *rN*, siendo *r* un entero, tal que n = *rN*+n_1, n_1 < *N*. Aplicando esto a la ecuación (5.2) se obtiene.

$$F_D[(rN+n_1)\Omega] = \sum_{k=0}^{N-1} f(kT) e^{-j\Omega T(rN+n_1)k} \qquad (1.7)$$

Pero puede hacerse $e^{-j\Omega TNr} = e^{-j2\pi r} = 1$ de forma que

$$F_D[(rN+n_1)\Omega] = \sum_{k=0}^{N-1} f(kT) e^{-j\Omega Tn_1 k} = F_D(n_1\Omega)\,. \qquad (1.8)$$

O sea que cualquier valor de $F_D(n\Omega)$ para *n* > *rN* puede expresarse en términos de un argumento menor, $n_1\Omega$, donde n_1 = *n* módulo *N*[2]. En otras palabras $F_D(n\Omega)$ es periódica con periodo $N\Omega$.

Debido a la periodicidad de $F_D(n\Omega)$, la exactitud del cálculo de la transformada de Fourier continua queda afectada por el alias al usar la TFD. Estos efectos pueden minimizarse por medio de una razón de muestreo alta (es decir, *T* pequeño).

Los coeficientes de la serie exponencial de Fourier pueden calcularse de la TDF multiplicando después por 1/*N*, el componente de mayor frecuencia que puede determinarse corresponde a *n* = *N*/2 ó $(N/2)\Omega = (2T)^{-1} Hz$. Esto concuerda con el teorema del muestreo.

Por analogía la transformada inversa de Fourier discreta, (TIFD) es:

$$f(kT) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} F_D(n\Omega) e^{j\Omega Tkn} \qquad (1.9)$$

La TFD y la TIFD forman un par exacto de transformada; es en la comparación con la transformada continua, con las restricciones enunciadas. Como ejemplo, la TIFD del producto de la TFD de dos secuencias es la convolución de las secuencias, aunque la convolución resultante es periódica[3]. De hecho, como la TIDF es básicamente de la misma forma que la TDF, todas las funciones que tengan TDF se extienden periódicamente con periodo *NT*. Para una función truncada, una manera conveniente de reducir los efectos de la periocidad es agregar ceros como puntos adicionales de muestra a la secuencia. Estos ceros se llaman *ceros de aumento* (padding with zero) y se colocan al final de la secuencia. Esto reduce el espaciamiento de las frecuencias

[2] Un número se escribe como módulo *N* expresando el residuo después de sustraer todos los múltiplos enteros de *N*; es decir, 14 módulo 4 es 2, 14 módulo 5 es 4, etc.

[3] La convolución periódica se llama a menudo convolución circular.

armónicas y los efectos del alias en una onda determinada, a expensas de mayor tiempo de computación. En el ejemplo en la guía se ilustra su empleo.

Se ha supuesto que los datos se muestrean con los enteros k = 0,1,2..., (N-10) [o bien k = 1,2,3,..., N[4]]. Cuando una transformada continua se aproxima por la TFD, puede asignarse muestras para valores negativos del tiempo al intervalo (N/2, N). Las relaciones de simetría resultantes aparece en la figura 1.1. si se usan ceros de aumento, pueden agregarse simétricamente con respecto a k = N/2. en el dominio de las frecuencias discretas rigen relaciones de simetría análoga, salvo que los componentes de frecuencia negativa y positiva, son conjugados complejos para $f(t)$ real.

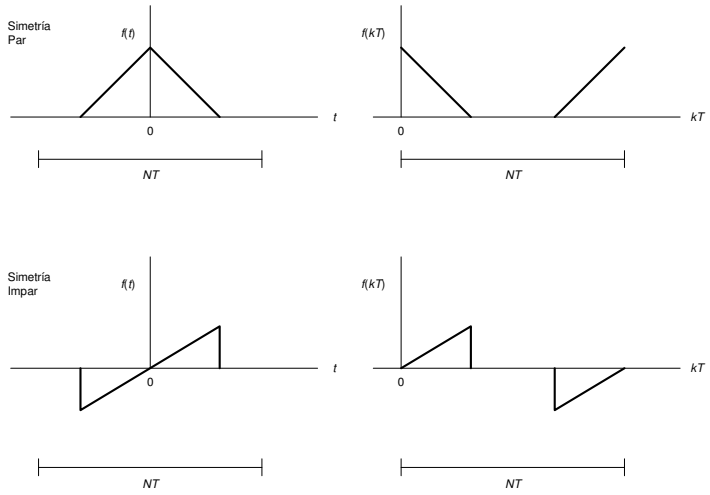

Figura 1.1 Relaciones de simetría para la transformada discreta de Fourier.

A menudo interesa hacer una estimación lo mejor posible de los componentes de frecuencia de $F(\omega)$ basándose en los datos del intervalo (0, NT). Para funciones de duración finita, puede elegirse el intervalo de computación de forma que corresponda a (o sea mayor que) la duración de la función $f(t)$. Este es el caso del ejemplo que se presenta en la parte I del procedimiento. Otro caso interesante es cuando el intervalo de computación es solo una porción de la duración de $f(t)$. Para investigar algunos efectos de este truncamiento de $f(t)$, la ecuación 1.4 se rescribe como:

$$\overline{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) rect\left[(t - NT/2)/(NT)\right] e^{-j\omega t} dt \,. \qquad (1.10)$$

Escrito así, el truncamiento puede verse como una ventana que permite observar solo un intervalo finito de $f(t)$. De ahí que estas funciones, como la segunda de la integral de la ecuación anterior, se llaman *funciones ventana.*

La ecuación anterior puede también expresarse como una convolución en las frecuencias:

$$\overline{F}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\left[F(\omega)\right] \otimes \left[NTSa(\omega NT/2) e^{-j\omega NT/2}\right]. \qquad (1.11)$$

Idealmente, el segundo término entre corchetes debe ser una función impulso para dar una medida correcta de $F(\omega)$. Sin embargo, esto requiere que $(NT) \to \infty$ por lo que no es una alternativa práctica.

[4] Como resultado de la periodicidad por extensión, los puntos de muestra k = 0 y k = N, son idénticos.

Para una longitud finita definida *NT*, una cantidad de interés es la mínima separación medible entre componentes de frecuencia. Esta separación mínima se llama resolución de las frecuencias en la estimación de $F(\omega)$ a partir de $\overline{F(\omega)}$. Si dos componentes de frecuencia adyacentes tienen amplitudes iguales, la resolución de frecuencia se fija simplemente por la longitud definida NT:

$$\Delta\Omega = 2\pi/(NT) \tag{1.12}$$

Si los dos componentes tienen amplitudes distintas, es necesario también que la transformada de la función ventana decrezca rápidamente para $\omega \neq 0$. La función *sen* x /x correspondiente a la ventana rectangular es relativamente pobre a este respecto dado que la cresta principal (esto es, cerca de $\omega = 0$) tiene magnitud unitaria y la siguiente tiene una magnitud pico de 0.217 (es decir, -13dB). Por tanto, los componentes de frecuencia adyacentes cuyas magnitudes difieran aproximadamente en más de 5, pueden ser distinguibles aun cuando se satisfaga la ecuación anterior.

Un remedio es elegir una función ventana que trunca a *f*(*t*) y cuya transformada tenga crestas laterales bajas. Esto ha sido objeto de muchas investigaciones y no existe una solución ideal. Una simple aunque efectiva función ventana es la ventana de Hanning.

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{2\pi t}{NT}\right) & |t| < NT/2 \\ 0 & |t| > NT/2 \end{cases}, \tag{1.13}$$

que se muestra en la figura 1.2. Su transformada tiene crestas laterales más bajas que las de la ventana rectangular, a cambio de una cresta principal más amplia y alguna atenuación. Estos compromisos son típicos, en grados diferentes, de las varias funciones ventana usadas comúnmente en la práctica.

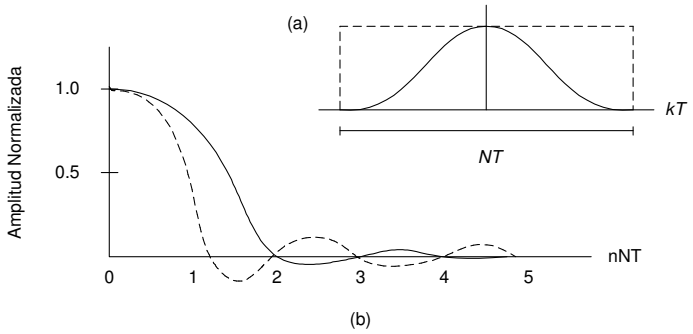

Figura 1.2 (a) las funciones ventana rectangular y de Hanning y (b) sus transformadas de Fourier.

Antes de comenzar es necesario definir brevemente la diferencia que existe entre los términos DFT y FFT: la FFT (transformada rápida de Fourier) es simplemente un algoritmo que realiza de forma muy rápida el cálculo de la DFT, y por lo tanto no se trata de una nueva transformada. En MATLAB siempre se emplea la función fft para calcular la DFT y no podemos encontrar ninguna función llamada dft.

De forma análoga, la función ifft siempre se emplea para calcular la DFT inversa. Por lo tanto, podemos considerar aceptable emplear indistintamente los términos DFT y FFT para referirnos al resultado del cálculo.

Procedimiento

PARTE I. OBTENCION DE LA TFD DE UNA SECUENCIA DE NUMEROS.

1. Encienda la computadora y corra el programa MATLAB.
2. **Pulsos:**
   Se trata de señales que solo contienen unos y ceros. Aunque en los siguientes ejercicios podemos representar las partes real e imaginaria de la DFT, resultan más interesantes las graficas del módulo y la fase.
   a. Señal impulso unitaria: xi=[1,0,0,0,0,0,0,0] se corresponde con la siguiente definición matemática:
   $$\delta[n]=\begin{cases}1 & n=0\\ 0 & n=1,2,...N-1\end{cases}$$
   obtenga la DFT de 8 puntos de la señal impulso unitario, es decir, tome *N*=8. En general, ¿Cuál es la DFT de N puntos de $\delta[n]$?
   ```
   >>xi=[1,0,0,0,0,0,0,0];
   >>Fxi=fft(xi)
   ```
   b. Señal con todos unos: x1=[1,1,1,1,1,1,1,1]. Podemos observar como este ejemplo junto con el anterior ponen de manifiesto la propiedad de dualidad de la DFT
   ```
   >>x1=[1,1,1,1,1,1,1,1];
   >>Fx1=fft(x1)
   ```
   c. Impulso desplazado: xish=[0,0,0,1,0,0,0,0]. Represente el módulo de la DFT.
   ```
   >> xish=[0,0,0,1,0,0,0,0];
   >> Fxish=fft(xish)
   >> n=0:7;
   >> subplot(2,1,1)
   >> stem(n,xish)
   >> subplot(2,1,2)
   >> stem(n,abs(Fxish))
   ```
   Pruebe con otros desplazamientos: ¿Hay alguno para el cual la DFT sea real?
   _____
   d. Señal rectangular de 3 puntos: xb=[1,1,1,0,0,0,0,0]. Obtenga también la DFT correspondiente a la señal rectangular de cuatro puntos.
   e. Señal rectangular con simetría: xbsy=[1,1,0,0,0,0,0,1]. Compruebe que su DFT es real y compare los módulos de xb y xbsy.

3. Computar la transformada de Fourier de $f(t)= u(t) - u(t-1)$ usando cuatro muestras en el intervalo (0,1).

   Solución:
   En MATLAB escriba la siguiente secuencia:
   ```
   >> f = [1,1,1,1];
   >> fd = fft(f)
   ```
   Lo que da como resultado la secuencia {4,0,0,0} cuando lo que se espera es una secuencia con la forma discreta de la transformada de Fourier de un pulso rectangular, que es:

$$F_D(n\Omega)=4e^{-jn\pi/2}Sa(n\pi)=\begin{Bmatrix}4 & n=0\\ 0 & n\neq 0\end{Bmatrix}$$ en (0,4),

para mejorar esta situación se sitúan algunos ceros de aumento después de la secuencia de cuatro muestras. La nueva secuencia es {1,1,1,1,0,0,0,0}

Solución:
```
>> Fd = fft(f,8)
```
al graficar magnitudes de la respuesta tenemos
```
>> n=0:4;
>> stem(n, abs(Fd(n+1)))
>> xlabel ('n')
>> ylabel ('|Fn(n0)|')
```

Lo que demuestra la tendencia

4. **Partes Par e Impar**

a) Genere una señal de prueba real $v(n)$, empleando rand, que sea relativamente corta; por ejemplo, $N = 15$ ó $N = 16$. Calcular la DFT de $v(n)$ para obtener $V(k)$ e intente realizar los apartados siguientes empleando tanto una longitud par como impar.

b) Calcular las partes par e impar de $v(n)$

$$v_e(n) = \frac{1}{2}\left[v(n) + v(-n \bmod N)\right]$$

$$v_O(n) = \frac{1}{2}\left[v(n) - v(-n \bmod N)\right]$$

y a continuación la DFT de cada una de ellas.

c) Extraiga las partes real e imaginaria de las DFTs obtenidas en el apartado anterior y compare:

$$DFT\left[v_e(n)\right] \text{ vrs. } \mathrm{Re}\left[V(k)\right]$$
$$DFT\left[v_O(n)\right] \text{ vrs. } \mathrm{Im}\left[V(k)\right]$$

5. Halle la transformada TFD de las secuencias siguientes. (a){1,0,1,0}; (b) {1,1,0,0}

Solución :
En MATLAB escriba la siguiente secuencia:
```
>> a = [1,0,1,0];
>> Fd1 = fft(a)
>> b = [1,1,0,0]
>> Fd2 = fft(b)
```

6. Calcular la magnitud de la transformada de Fourier de $f(t) = sen\sqrt{2}t + 0.1sen7\pi t$ en el intervalo (0,2) usando la TFD con 32 puntos de muestra y (a) una ventana rectangular; y (b) una ventana de Hanning.
Solución:

$\Omega = 2\pi/2 = \pi,\ T = \frac{2}{32} = \frac{1}{16};$

donde $f(kT) = sen(\sqrt{2k}/16 + 0.1sen(7\pi k/16)$

para la ventana rectangular se tiene:

$$F_D(n\Omega) = \sum_{k=0}^{31} f(kt)\,rect\left[(k-16)/32\right]e^{-j\pi nk/16},$$

y para la ventana de Hanning:

$$F_D(n\Omega) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{31} f(kt)\left\{1+\cos\left[\pi(k-16)/16\right]\right\}e^{-j\pi nk/16},$$

en MATLAB el código para la ventana de Hanning se escribiría así:

```
>> k = 0:31;
>> fkT = sin(sqrt(2)*k/16)+0.1*sin(7*pi*k/16);
>> f = fkT.*(1+cos(pi*(k-16)/16))/2;
>> Fd = fft(f);
>> n=0:15;
>> semilogy(n.abs(Fd(n+1)),'g')
>> axis([0,15,1e-4,1e2])
```

para la ventana rectangular será:

```
>> hold on
>> Fd=fft(fkT);
>> semilogy(n,abs(Fd(n+1)),'r')
>> hold off
```

los efectos de las crestas laterales más bajas, así como la más amplia cresta principal de la ventana de Hanning, resultan evidentes.

PARTE II. LA DFT COMO UNA MATRIZ.

1. La DFT puede expresarse de forma:

```
function b = dftmtx(n)
% DFTMTX Discrete Fourier Transform matrix.
% DFTMTX (N) is the N-by-N complex matrix of values around
% The unit-circle whose inner product with a column vector
% of length N yields the discrete Fourier transform of the
% vector. DFTMTX (LENGTH(X))*X is the same as FFT(X)
%
% The inverse discrete Fourier transform matrix is
% CONJ ( DFTMTX(N))/N. See also FFT and IFFT.

% Author(s): Denham, 7-21-88
% Copyright (c) 1988-93 by The MathWorks, Inc.
% $ Revision: 1.3 $  $Date: 1993/08/19 21:48;59 $

f = 2*pi/n;                %Angular increment.
w = (0:f:2*pi-f/2).' * sqrt(-1);              %Column.
x = 0:n-1;                 % Row
b =  exp (-w*x);           % Exponentiation of outer product.
```

2. Realice la prueba de la función dftmtx anterior
   En MATLAB escriba la siguiente secuencia:

```
>> a = rand(10,1);    %debe ser un vector columna
>> Fd1 = fft(a)
>> Fd2 = dftmtx(length(a))*a
```

PARTE III. CAPTURA DE LOS ARCHIVOS DE DATOS AL PROGRAMA MATLAB.

1. Ejecute el programa MATLAB y utilice los comandos para capturar una señal desde la tarjeta de sonido, que creó en las practicas pasadas, de la siguiente manera:

```
ai=analoginput('winsound',0)
addchannel(ai,1);
```

```
ai.SampleRate=8000;
ai.SamplesPerTrigger=40000;
ai.TriggerType='Immediate';
start(ai)
[d,t]=getdata(ai);
```

con lo cual se crean las variables tiempo t y datos d en MATLAB las cuales poseen los datos digitalizados.

2. Grafique los datos usando el comando stem.
   >> hold off
   >> stem(t,d)
3. Encuentre la transformada de Fourier discreta de la señal capturada usando el comando fft, agregue una cantidad de ceros de forma que la longitud de la señal sea ahora de 65536 muestras.
4. Grafique la magnitud y la fase de la transformada de Fourier discreta usando la función stem.
5. Salga del programa, apague todo el equipo.

Análisis de resultados

1. ¿Cuál es la utilidad de emplear la transformada de Fourier discreta?.
2. ¿Cuál es la razón de agregar ceros a la secuencia de números en el numeral 3 de la parte I?.
3. ¿Por qué es necesario el uso de las ventanas rectangulares y de Hanning?
4. ¿Qué ventana considera que es mejor, la rectangular o la de Hanning? Explique.
5. Imprima una copia de la transformada de Fourier discreta de la señal de voz que digitalizó en la práctica.

Investigación complementaria

1. Investigue sobre el comando fourier que posee la caja de herramientas de Matemática Simbólica MATLAB.
2. Investigue otros tres tipos de ventanas que existen.
3. Investigue acerca de las propiedades de la DFT como una matriz.
4. Documentar la forma de obtener la transformada discreta de Fourier de una señal continua utilizando SCILAB y demostrarla con un archivo ejecutable en SCILAB.

Bibliografía

- 🕮 Sistemas de Comunicaciones. Stremler, Ferrel G., Alfa omega.
- 🕮 The MathWorks Inc. Manual del usuario de MATLAB.